10.4 – 10.5
Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου και λόγος εμβαδών

ΘΕΩΡΙΑ

1.

$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

$E = \tau\,\rho$

$E = \dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4R}$

$E = \dfrac{1}{2}\beta\,\gamma\,\eta\mu A = \dfrac{1}{2}\alpha\,\gamma\,\eta\mu B = \dfrac{1}{2}\beta\,\alpha\,\eta\mu\Gamma$

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$

2.

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων

3.

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

4.

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

5.

Αν μια κορυφή τριγώνου μετατοπισθεί παράλληλα προς την απέναντι πλευρά, το εμβαδόν του τριγώνου παραμένει σταθερό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

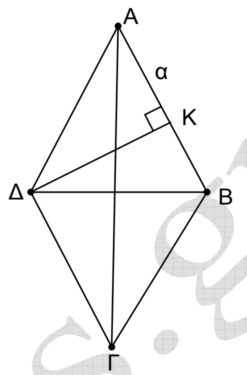
Σε ρόμβο ΑΒΓΔ δίνεται ότι ΑΒ = α και $\hat{A} = 45^o$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση των απέναντι πλευρών του ρόμβου.

Προτεινόμενη λύση

i)



Είναι $(ΑΒΔ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΔ\, ημ\widehat{A}$

$= \frac{1}{2} α \cdot α \cdot ημ45^o$

$= \frac{α^2\sqrt{2}}{4}$

Οπότε $(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΔ) = \frac{α^2\sqrt{2}}{2}$

ii)

Φέρνουμε $ΔΚ \perp ΑΒ$. Τότε $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΔΚ \Leftrightarrow$

$\frac{α^2\sqrt{2}}{2} = α \cdot ΔΚ \Leftrightarrow$

$ΔΚ = \frac{α\sqrt{2}}{2}$

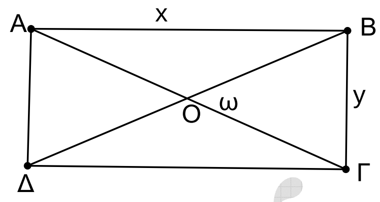
2.

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 2 και εμβαδόν $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

i) Να υπολογιστούν τα μήκη των διαγωνίων του ορθογωνίου.

ii) Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας των διαγωνίων

Προτεινόμενη λύση



i)

Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου με $x > y$

Τότε $2x + 2y = 2 \iff x + y = 1$ **(1)**

Και $E = x\,y \iff xy = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $x = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Οπότε $ΑΓ^2 = x^2 + y^2 \iff ΑΓ^2 = \dfrac{3(\sqrt{3}-1)^2}{4} + \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}$

$= (\sqrt{3}-1)^2$

άρα $ΑΓ = \sqrt{3}-1 = ΒΔ$

ii)

Έστω ω η γωνία των διαγωνίων.

$(ΒΟΓ) = \dfrac{1}{4}(ΑΒΓΔ) \iff \dfrac{1}{2} ΟΒ \cdot ΟΓ\, ημω = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} ημω = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

$ημω = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{(\sqrt{3}-1)^2} = \ . \ . \ . \ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $\widehat{ω} = 60^o$

3.
Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι $\alpha = 10$, $\beta = 12$, $\gamma = 14$. Να υπολογίσετε τα ύψη του και τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}$

Άρα $\upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \dfrac{2}{10}\cdot 24\sqrt{6} = \dfrac{24}{5}\sqrt{6}$

$\upsilon_\beta = \dfrac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \dfrac{2}{12}\cdot 24\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

$\upsilon_\gamma = \dfrac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \dfrac{2}{14}\cdot 24\sqrt{6} = \dfrac{24}{7}\sqrt{6}$

$E = \tau\cdot\rho \Leftrightarrow 24\sqrt{6} = 18\rho \Leftrightarrow \rho = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

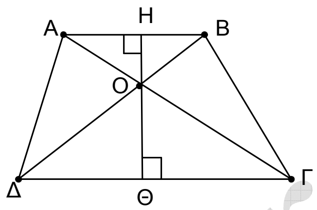
$E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow 24\sqrt{6} = \dfrac{1680}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{35\sqrt{6}}{12}$

4.

Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις $ΑΒ = α$, $ΓΔ = 2α$ και ύψος $υ = \frac{3}{2}α$.

Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το τραπέζιο από τις διαγώνιες του.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ΗΟΘ το ύψος του τραπεζίου.

Επειδή ΑΒ//ΓΔ τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΔΓ}{ΑΒ} = \frac{2α}{α} = 2$

Επομένως $\frac{(ΔΟΓ)}{(ΑΟΒ)} = λ^2 \Leftrightarrow \frac{(ΔΟΓ)}{(ΑΟΒ)} = 4 \Leftrightarrow (ΔΟΓ) = 4(ΑΟΒ)$

Ακόμα $\frac{ΟΘ}{ΟΗ} = λ = 2 \Rightarrow ΟΘ = 2ΟΗ$

$ΟΘ = 2(ΗΘ - ΟΘ)$

$3ΟΘ = 2ΗΘ$

$ΟΘ = \frac{2}{3}ΗΘ \Rightarrow ΟΘ = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}α = α$

Συνεπώς $(ΔΟΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΔΓ \cdot ΟΘ = \frac{1}{2}\cdot 2α \cdot α = α^2$

$(ΔΟΓ) = 4(ΑΟΒ) \Leftrightarrow α^2 = 4(ΑΟΒ)$

$(ΑΟΒ) = \frac{1}{4}α^2$

$Α\hat{Ο}Δ + Δ\hat{Ο}Γ = 180^o \Rightarrow \frac{(ΔΟΓ)}{(ΑΟΔ)} = \frac{ΟΓ\cdot ΟΔ}{ΟΔ\cdot ΟΑ} = \frac{ΟΓ}{ΟΑ} = λ = 2$

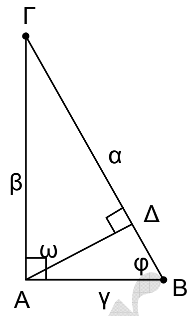
Οπότε $\frac{α^2}{(ΑΟΒ)} = 2 \Leftrightarrow (ΑΟΒ) = \frac{1}{2}α^2$

Ομοίως $(ΒΟΓ) = \frac{1}{2}α^2$

5.

Αν ΑΔ ύψος στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ , δείξτε ότι $\dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

Προτεινόμενη λύση



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ έχουν $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ επειδή είναι οξείες με κάθετες πλευρές.

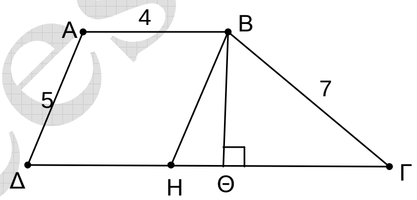
Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \dfrac{\gamma}{\beta}$

Οπότε $\dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \lambda^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

6.

Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις ΑΒ = 4, ΓΔ = 8 και μη παράλληλες πλευρές ΑΔ = 5 και ΒΓ = 7. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου.

Προτεινόμενη λύση



Από το Β φέρνουμε τη ΒΗ//ΑΔ.

Τότε το ΑΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε $\Delta H = AB = 4$,

$BH = A\Delta = 5$ και

$H\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta H = 4$

Το ύψος ΒΘ του τριγώνου ΒΗΓ είναι και ύψος του τραπεζίου.

Είναι δε $B\Theta = \dfrac{2}{H\Gamma}\sqrt{\tau(\tau - BH)(\tau - H\Gamma)(\tau - B\Gamma)}$

$= \dfrac{2}{4}\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)} = 2\sqrt{6}$

$(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{(AB + \Gamma\Delta)B\Theta}{2} = \dfrac{(4+8)2\sqrt{6}}{2} = 12\sqrt{6}$

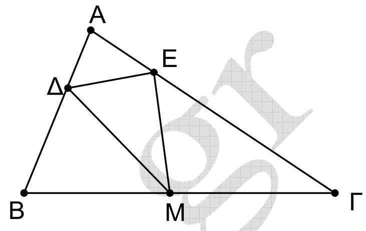
7.

Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, έτσι ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{4}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΜ συναρτήσει του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

$$\widehat{Α} \text{ κοινή } \Rightarrow \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{1}{3}ΑΒ \cdot \frac{1}{4}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{12}$$

Άρα $(ΑΔΕ) = \frac{1}{12}(ΑΒΓ)$



Ομοίως $(ΒΔΜ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$

και $(ΓΕΜ) = \frac{3}{8}(ΑΒΓ)$

Οπότε $(ΔΕΜ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) - (ΒΔΜ) - (ΓΜΕ)$

$$= (ΑΒΓ) - \frac{1}{12}(ΑΒΓ) - \frac{1}{3}(ΑΒΓ) - \frac{3}{8}(ΑΒΓ)$$

$$= \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$$

8.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $(ΑΒΓ) = \frac{α}{2}\sqrt{(τ-β)(τ-γ)}$. Δείξτε ότι $β + γ = α\sqrt{2}$.

Προτεινόμενη λύση

$$(ΑΒΓ) = \frac{α}{2}\sqrt{(τ-β)(τ-γ)} \Leftrightarrow \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \frac{α}{2}\sqrt{(τ-β)(τ-γ)}$$

$$\sqrt{τ(τ-α)} = \frac{α}{2}$$

$$τ(τ-α) = \frac{α^2}{4}$$

$$\frac{α+β+γ}{2}\left(\frac{α+β+γ}{2} - α\right) = \frac{α^2}{4}$$

$$\frac{α+β+γ}{2}\,\frac{β+γ-α}{2} = \frac{α^2}{4}$$

$$(β+γ)^2 - α^2 = α^2$$

$$(β+γ)^2 = 2α^2$$

$$β + γ = α\sqrt{2}$$

9.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma = 2$, $\beta = 1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $E = \dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$

i) Να δείξετε $\alpha = \sqrt{3}$

ii) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

iii) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΒΓ

Προτεινόμενη λύση

i)

$$E = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,\eta\mu\hat{A} = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 45^o$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A}$

$$= (1+\sqrt{2})^2 + 4 - 4(1+\sqrt{2})\,\sigma\upsilon\nu 45^o$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 - 4(1+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$= 3$ άρα $\alpha = \sqrt{3}$

ii)

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

iii)

Αν ΒΔ είναι η προβολή της ΑΒ στη ΒΓ, από την γενίκευση του Πυθαγορείου στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma\, B\Delta$

$$(1+\sqrt{2})^2 = 4 + 3 - 2\sqrt{3}\,B\Delta$$

$$B\Delta = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$$

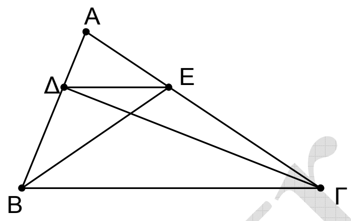
10.

Μία ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Δ, και Ε αντίστοιχα,. έτσι ώστε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι :

i) $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΒΓ)(ΑΔΓ) = (ΑΓΔ)^2$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΕΓΒ συναρτήσει του εμβαδού του ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση



$(ΑΒΕ)^2 = (ΑΒΓ)(ΑΔΓ) \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή $\hat{Α}$ κοινή, η (1) γίνεται

$$\frac{ΑΒ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΕ} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΕ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$$ που ισχύει, αφού ΔΕ//ΒΓ

Ομοίως $(ΑΒΓ)(ΑΔΓ) = (ΑΓΔ)^2$

ii)

$$\hat{Α} \text{ κοινή} \quad \Rightarrow \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} \quad \textbf{(2)}$$

Όμως $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΔ}{ΑΔ + ΔΒ} = \frac{1}{1+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$

Και επειδή ΔΕ //ΒΓ, θα είναι και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{3}$

Η (2) γίνεται $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad (ΑΔΕ) = \frac{1}{9}(ΑΒΓ)$

Οπότε $(ΔΕΓΒ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ\,) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{9}(ΑΒΓ) = \frac{8}{9}(ΑΒΓ)$

11.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει βγ = 6Rρ, να αποδείξετε ότι β + γ = 2α.

Προτεινόμενη λύση

$Ε = \frac{αβγ}{4R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{αβγ}{4Ε}$

$Ε = τρ \quad \Rightarrow \quad ρ = \frac{Ε}{τ}$

$βγ = 6Rρ \quad \Rightarrow \quad βγ = 6\frac{αβγ}{4Ε}\frac{Ε}{τ}$

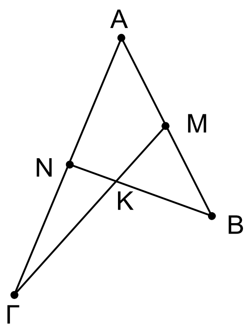
$2τ = 3α$

$α + β + γ = 3α$

$β + γ = 2α$

12.

Στο παρακάτω σχήμα, τα Μ, Ν είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι



i) $\frac{(ABN)}{(AM\Gamma)} = 1$

ii) $(NK\Gamma) = (KMB)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΝΒ έχουν την γωνία $\widehat{A}$ κοινή άρα $\frac{(ABN)}{(AM\Gamma)} = \frac{AB\cdot AN}{AM\cdot A\Gamma}$

$= \frac{2AM\cdot AN}{AM\cdot 2AN} = 1$

ii)

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\frac{(ABN)}{(AM\Gamma)} = 1$

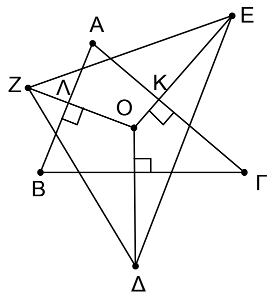
$(ABN) = (AN\Gamma)$

$(AMKN) + (BKM) = (AMKN) + (NK\Gamma)$

$(BKM) = (NK\Gamma)$

13.

Στο διπλανό σχήμα είναι $O\Delta \perp B\Gamma$, $OE \perp A\Gamma$, $OZ \perp AB$ και $O\Delta = B\Gamma$, $OE = A\Gamma$, $OZ = AB$



i) Δείξτε ότι $(AB\Gamma) = (ZOE)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ συναρτήσει του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

i)

Στο τετράπλευρο Α Λ Ο Κ του παραπάνω σχήματος είναι

$\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90^o$, άρα $\widehat{A} + Z\widehat{O}E = 180^o \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(ZOE)} = \frac{AB\cdot A\Gamma}{ZO\cdot OE}$

$= \frac{ZO\cdot OE}{ZO\cdot OE} = 1$

Άρα $(AB\Gamma) = (ZOE)$

ii)

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $(AB\Gamma) = (ZO\Delta)$ και $(AB\Gamma) = (\Delta OE)$

Οπότε $(\Delta EZ) = (ZOE) + (ZO\Delta) + (\Delta OE) = 3(AB\Gamma)$

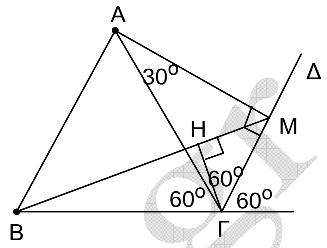
14.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Φέρουμε τη διχοτόμο ΓΔ της εξωτερικής γωνίας Γ και από το Α, την $AM \perp \Gamma\Delta$. Δείξτε ότι

i) $(B\Gamma M) = (A\Gamma M) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$

ii) Αν ΓΗ ύψος του τριγώνου ΒΓΜ, τότε $\Gamma H = \dfrac{\alpha\sqrt{21}}{14}$.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\Gamma_{\varepsilon\xi}$ γωνίας,

θα είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = 60^o$, οπότε $\Gamma\hat{A}\Delta = 30^o$,

άρα $\Gamma M = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

$$(B\Gamma M) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \Gamma M \cdot \eta\mu\, B\hat{\Gamma}M =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{4}\alpha^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$$

$$(A\Gamma M) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Gamma M \cdot \eta\mu\, A\hat{\Gamma}M = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \eta\mu 60^o = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$$

ii)

Νόμος συνημιτόνων : $BM^2 = B\Gamma^2 + \Gamma M^2 - 2B\Gamma \cdot \Gamma M\, \sigma\upsilon\nu 120^o$

$$= \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} + 2\,\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7\alpha^2}{4}$$

Άρα $BM = \dfrac{\alpha\sqrt{7}}{2}$

$$(B\Gamma M) = \frac{1}{2} BM \cdot \Gamma H \Leftrightarrow \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{7}}{2} \cdot \Gamma H \Leftrightarrow \Gamma H = \frac{\alpha\sqrt{21}}{14}$$

15.

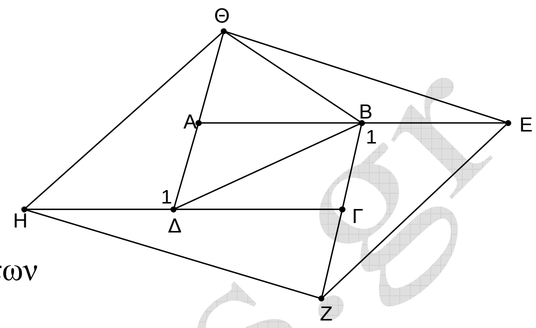
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ θεωρούμε τμήματα ΒΕ = ΑΒ , ΓΖ = ΒΓ, ΔΗ = ΔΓ και ΑΘ = ΔΑ.

Να αποδείξετε ότι

i) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο

ii) (ΕΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ)

Προτεινόμενη λύση



i)

Τα τρίγωνα ΗΘΔ και ΒΕΖ έχουν

α) ΔΗ = ΒΕ, ίσες προεκτάσεις των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΔΓ.

β) ΔΘ = ΒΖ, σαν αθροίσματα ίσων τμημάτων

γ) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, σαν παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΘΗ = ΕΖ .

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΘΕ = ΗΖ . Συνεπώς το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει ανά δύο τις απέναντι πλευρές του ίσες .

ii)

Προφανώς , τρίγωνο ΑΒΔ = τρίγωνο ΒΔΓ άρα (ΑΒΔ) = (ΒΔΓ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓΔ)

Στο τρίγωνο ΘΒΔ, η ΒΑ είναι διάμεσος, άρα (ΑΘΒ) = (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓΔ)

Ομοίως $\frac{1}{2}$ (ΑΘΕ) = (ΑΘΒ) = (ΘΒΕ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓΔ)

Επομένως (ΑΘΕ) = (ΑΒΓΔ)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι (ΗΔΘ) = (ΗΓΖ) = (ΒΕΖ) = (ΑΒΓΔ)

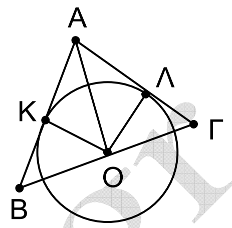
Οπότε (ΕΖΗΘ) = (ΗΔΘ) + (ΗΓΖ) + (ΒΕΖ) +(ΑΘΕ) +(ΑΒΓΔ) = 5(ΑΒΓΔ)

16.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο κύκλος (Ο, ρ) που έχει το κέντρο του στην ΒΓ και εφάπτεται των ΑΒ και ΑΓ. Αν α, β, γ είναι οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ

Δείξτε ότι $\rho = \dfrac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Προτεινόμενη λύση



Προφανώς είναι $(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΑΟΓ})$

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΟΚ} + \frac{1}{2}\text{ΑΓ}\cdot\text{ΟΛ}$$

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\gamma\cdot\rho + \frac{1}{2}\beta\cdot\rho$$

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\rho(\beta+\gamma)$$

$$\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{1}{2}\rho\,(\beta+\gamma)$$

$$\rho = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$